Más sobre series de Fourier: relación entre serie exponencial y serie trigonométrica.

Tenemos:

- $\left\{ e^{\frac{ik\pi x}{L}} \right\}_{k=-\infty}^{\infty}$ → conjunto ortogonal completo en $L^2_{\mathbb{C}}[-L,L]$

  $\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{ik\pi x}{L}}}$ Serie exponencial de Fourier.

- $\left\{ 1, \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right\}_{k=1}^{\infty}$ → conj. ortogonal completo en $L^2_{\mathbb{R}}[-L,L]$.

  $\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)}$ → serie trigonométrica de Fourier

Sea $f: [-L,L] \to \mathbb{R} \in L^2_{\mathbb{R}}[-L,L]$.

- si $k>0$

$$c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{\frac{-ik\pi x}{L}}\,dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\left(\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right)dx$$

$$= \frac{1}{2L}\left[\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx - i\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}(a_k - i b_k) \quad \text{si } k>0$$

- $$c_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}$$

- Si $k<0$:

$$c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{\frac{-ik\pi x}{L}}\,dx = \overline{\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{\frac{ik\pi x}{L}}\,dx} = \overline{c_{-k}}$$

$$= \frac{1}{2}(a_{-k} + i b_{-k})$$

Resumen:

$$\left.\begin{array}{l} c_k = \frac{1}{2}(a_k - i b_k) \quad \text{si } k>0 \\ c_0 = \frac{a_0}{2} \\ c_k = \frac{1}{2}(a_{-k} + i b_{-k}) \quad \text{si } k<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{para } k>0: \\ a_k = c_k + c_{-k} = c_k + \overline{c_k} \\ b_k = i(c_k - c_{-k}) = i(c_k - \overline{c_k}) \\ a_0 = 2c_0 \end{array}\right.$$

$$SEF = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi x}{L}} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi x}{L}} + c_{-k} e^{-i\frac{k\pi x}{L}} =$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - ib_k}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right) + \left(\frac{a_k + ib_k}{2}\right)\left(\cos\frac{k\pi x}{L} - i\,\mathrm{sen}(\cdot\cdot)\right)$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} + \frac{a_k}{2}\right)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + \frac{(b_k + b_k)}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = S.T.F.$$

Por este motivo se enuncian los teoremas de convergencia para la S.E.F., que se podrán aplicar directamente a la S.T.F.

Convergencia de Series de Fourier

Def. Sea $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$ la sucesión de sumas parciales de Fourier, respecto a un sistema ortonormal $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ en un espacio vectorial V de funciones.

Convergencia en media cuadrática (o convergencia cuadrática)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{S_n converge en media cuadrática a f si}\\ \lim_{n\to\infty} \|S_n - f\| = \lim_{n\to\infty} \big(\underbrace{\langle S_n - f, S_n - f\rangle}_{\text{prod interno en } V \text{, que induce norma } \|\ \|}\big)^{1/2} = 0\end{array}}$$

Si $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\cdot\overline{g(x)}\,dx$, equivale:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_a^b \big(S_n(x) - f(x)\big)\big(\overline{S_n(x) - f(x)}\big)\,dx\right]^{1/2} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \Big(S_n(x)\cdot\overline{S_n(x)} + f(x)\overline{f(x)} - S_n(x)\overline{f(x)} - \overline{S_n(x)}f(x)\Big)\,dx = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |S_n(x)|^2 + |f(x)|^2 - \sum_{k=1}^{n}\Big(c_k \varphi_k(x)\overline{f(x)} + f(x)\overline{c_k}\,\overline{\varphi_k(x)}\Big)\,dx = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_a^b |S_n(x)|^2 dx}_{\downarrow} + \int_a^b |f(x)|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k \underbrace{\int_a^b \overline{f(x)}\varphi_k(x)\,dx}_{\overline{c_k}} + \overline{c_k}\underbrace{\int_a^b f(x)\overline{\varphi_k}(x)\,dx}_{c_k} = 0$$

$$|S_n(x)|^2 = S_n(x)\cdot\overline{S_n(x)} = \left(\sum_1^n c_k\varphi_k(x)\right)\cdot\left(\sum_1^n \overline{c_j}\,\overline{\varphi_j}(x)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_k\overline{c_j}\cdot\varphi_k(x)\cdot\overline{\varphi_j}(x)$$

$$\int_a^b |S_n(x)|^2 dx = \sum_k\sum_j c_k\overline{c_j}\underbrace{\int_a^b \varphi_k(x)\overline{\varphi_j}(x)\,dx}_{\substack{=0 \text{ si } k\neq j,\\ 1 \text{ si } k=j}} = \sum_{k=1}^{n} c_k\overline{c_k} = \sum_k |c_k|^2$$

Convergencia cuadrática equivale:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k^n c_k \bar{c}_k + \int_a^b |f(x)|^2 dx - 2 \sum_k^n c_k \bar{c}_k = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 = 0$$

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n |c_k|^2 = \sum_{k=1}^\infty |c_k|^2$$ Parseval!

Convergencia puntual

S_n converge puntualmente a f en x_0 si

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = f(x_0)$$

Convergencia uniforme:

S_n converge uniformemente a f en $[a,b]$ si

$$\lim_{n\to\infty} \| S_n - f \|_\infty = 0$$

donde $\| S_n - f\|_\infty = \sup \{ |S_n(x) - f(x)| , x \in [a,b] \}$

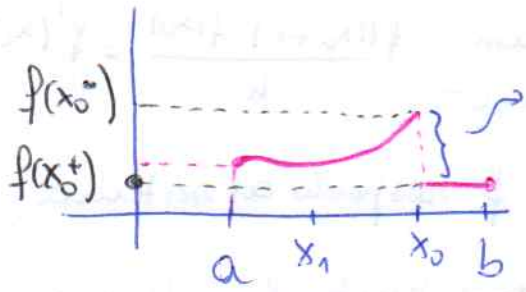
¿Qué condiciones sobre f nos aseguran algún tipo de convergencia? ¿qué tipo de convergencia?

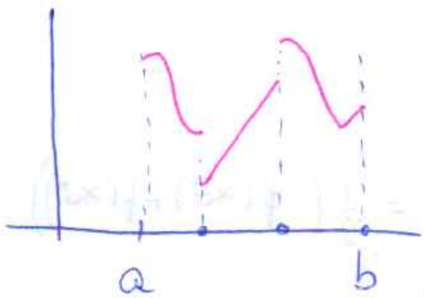
Def. f es continua por tramos en $[a,b]$ si es continua en cada punto de (a,b), excepto, quizás en una cantidad finita de puntos, donde tiene discontinuidades de salto finito; y existen (finitos) $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x)$

Es decir, existen (y son finitos)

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0^-) \quad y \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0^+).$$

Si $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$: f tiene una discontinuidad de salto en x_0





← típica función real continua por tramos

Observación: si f es continua por tramos en $[a,b] \Rightarrow f \in L^2[a,b]$
(es de cuadrado integrable)

Teoremas de convergencia:

Teorema de convergencia cuadrática (ya visto en clase 23, aquí se reformula).

Sea $\varphi_k(x) = e^{ik\frac{\pi}{L}x}$ $\rightarrow k \in \mathbb{Z}$, y $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{C}$ una función de cuadrado integrable ($f \in L^2[-L,L]$). Sea $c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) \cdot e^{-ik\frac{\pi}{L}x}\,dx$.

Entonces $\sum_{k=-n}^{n} c_k \varphi_k(x)$ converge cuadráticamente a f.

Teorema de convergencia puntual. (condiciones de Dirichlet)

Sea $f:[-L,L] \to \mathbb{C}$, continua por tramos.

Si en x_0 existen las derivadas laterales de f

(es decir, existen (finitos) $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0^+)$

$\lim_{h\to 0^-} \frac{f((x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0^-)$)

entonces, la serie de Fourier de f respecto al sistema ortogonal $\{\varphi_k(x) = e^{i\frac{k\pi x}{L}}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ converge puntualmente en x_0 al valor

$$\frac{1}{2}\left[f(x_0^-) + f(x_0^+)\right]$$

Es decir: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{i\frac{k\pi}{L}x_0} = \frac{1}{2}\left(f(x_0^-)+f(x_0^+)\right)$

con $c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\frac{k\pi x}{L}}dx$

Observación: si f es continua en x_0: $f(x_0^-)=f(x_0^+)$, entonces, si además existen derivadas laterales en x_0, la S.F. converge puntualmente a $f(x_0)$.

Observación: para convergencia puntual en $x_0=-L$ y en $x_0=L$ debe pedirse que existan: $f'(L^-)$ y $f'(-L^+)$ y en tal caso la serie converge a $\frac{1}{2}\left[f(L^-)+f(-L^+)\right]$.

Observación Supongamos que f es tal que su SF converge puntualmente para todo $x_0 \in [-L,L]$. ¿Y fuera de $[-L,L]$?

Como φ_k son $2L$-periódicos: $\varphi_k(x+2L) = e^{i\frac{k\pi}{L}(x+2L)} =$

$= e^{i\frac{k\pi}{L}x} \cdot \underbrace{e^{i\frac{k\pi 2L}{L}}}_{1} = e^{i\frac{k\pi}{L}x} = \varphi_k(x)$

entonces la SF es $2L$-periódica

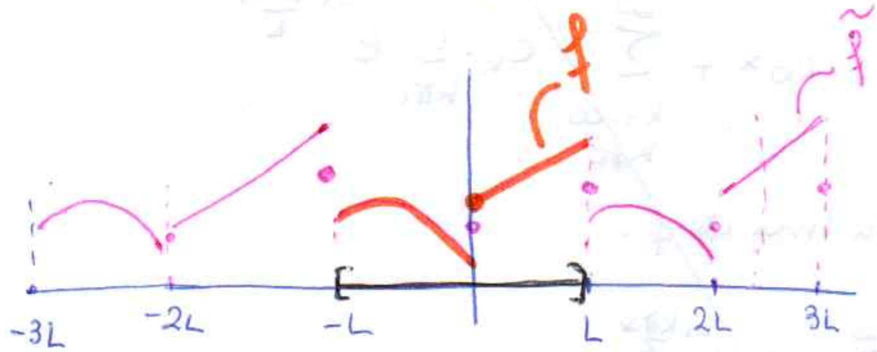
y converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Específicamente: sea $\tilde{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi x}{L}}$ para $x \in [-L, L]$.

Se puede extender $\tilde{f}$ a $\mathbb{R}$:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi x}{L}} \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

$\tilde{f}$ será $2L$ periódico

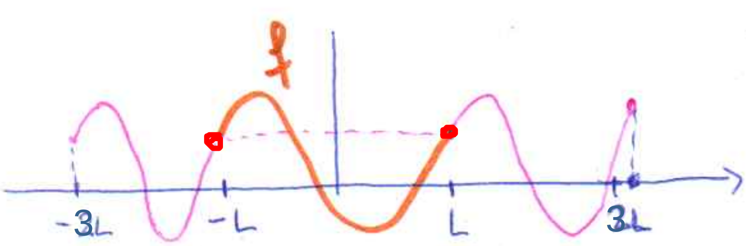


Teorema de convergencia uniforme

Sea $f: [-L, L] \to \mathbb{C}$, continua en $(-L, L)$, y $f(-L) = f(L)$, y además f' es continua por tramos.

Entonces la serie de Fourier de f respecto al sistema ortogonal $\{e^{i\frac{k\pi x}{L}}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ converge absolutamente y uniformemente en $[-L, L]$ a f.

Observación: la condición $f(-L) = f(L)$ hace que la extensión $2L$-periódica de f sea continua



Corolario (integración y derivación término a término de SF)

Sea f continua en $[-L, L]$ y $f(-L) = f(L)$, y f' continua por tramos en $[-L, L]$.

Entonces.

a) la SF de f: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{ik\pi x}{L}}$ se puede integrar término a término y la serie resultante es una primitiva de f.

Es decir:

$$F(x) = c_0 x + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} c_k \frac{L}{ik\pi} e^{\frac{ik\pi x}{L}}$$

es una primitiva de f.

b) si f'' es continua por tramos en $[-L, L]$, la SF de f se puede derivar término a término, y la serie resultante es la SF. de f'.

Es decir: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(\frac{ik\pi}{L}\right) e^{\frac{ik\pi x}{L}}$ es la SF de f'.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{ik\pi x}{L}} = \dots + c_{-2} e^{-\frac{i2\pi x}{L}} + c_{-1} e^{-\frac{i\pi x}{L}} + c_0 + c_1 e^{\frac{i\pi x}{L}} + c_2 e^{\frac{i2\pi x}{L}} + \dots$$

Ejemplo: Halla la SFF de $f(x) = \cos\left(\frac{3}{2}x\right)$ en $[-\pi,\pi]$ y analizar convergencia.

funcion par: f(x) = f(-x)
función impar: f(-x) = -f(x)

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \underset{\substack{\downarrow \\ \text{integrando} \\ \text{por}}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(\tfrac{3}{2}x\right)\cos(kx)\,dx.$$

$$a_k = \frac{12(-1)^k}{(4k^2-9)\pi} \quad k = 0,1,2,\dots$$

bk = 0 por ser f par

$$\text{STF}: \overbrace{-\frac{2}{3\pi}}^{a_0/2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{12(-1)^k}{(4k^2-9)\pi}\cos(kx).$$

Convergencia

- f es cuadrado integrable $\Rightarrow$ SF converge cuadráticamente a f.
- f es continua, $f(-\pi) = f(\pi)$, f' es continua $\Rightarrow$
  - SF converge puntualmente a $\cos\left(\frac{3}{2}x\right)$ $\forall x \in [-\pi,\pi]$, y a la extensión periódica de f fuera de $[-\pi,\pi]$
  - SF converge uniformemente a f
  - Como además f'' es continua, SF se puede derivar término a término, obteniéndose la SF de

$$f'(x) = -\frac{3}{2}\,\text{sen}\left(\tfrac{3}{2}x\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{12(-1)^k \cdot k}{(4k^2-9)\pi}\,\text{sen}(kx)$$

Ejemplo

La serie: $\boxed{\dfrac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k-1}{\pi k^2}\cos(kx)+\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\operatorname{sen}(kx)}$

es la STF de $\boxed{f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\leq x\leq 0\\ x & 0<x\leq\pi\end{cases}}$

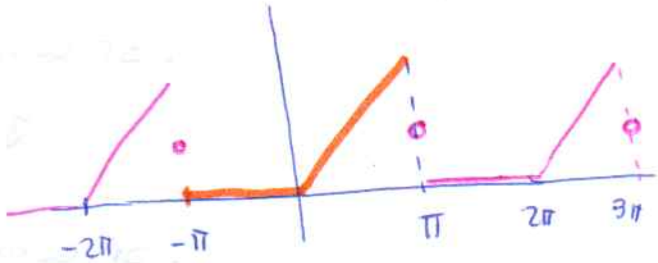
Es decir: $a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(kx)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos(kx)\,dx\underset{\text{si } k\neq 0}{=}\frac{(-1)^k-1}{\pi k^2}$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi}{2}$

$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\operatorname{sen}(kx)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\operatorname{sen}(kx)\,dx=\frac{(-1)^{k+1}}{k}$

La serie converge puntualmente (ya que f es continua por tramos, y existen $f'(x_0^-)$ y $f'(x_0^+)$ en todo $x_0\in(-\pi,\pi)$, y existen $f'(-\pi^+)$ y $f'(\pi^-)$)

a: $\tilde{f}(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x\leq 0\\ x & 0<x<\pi\\ \pi/2 & x=\pi \text{ o } x=-\pi\end{cases}$



y fuera de $[-\pi,\pi]$ a la extensión 2π periódica de $\tilde{f}$.

La serie con $x=\pi$ resulta:

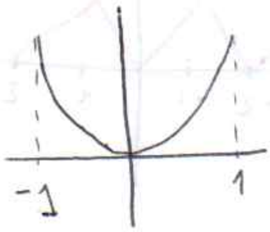
$$\frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{\pi k^2}\cdot\underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k}+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\underbrace{\operatorname{sen}(k\pi)}_{0}=\frac{\pi}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\frac{1-(-1)^k}{\pi k^2}}_{=0 \text{ si } k \text{ par}}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}\rightsquigarrow\boxed{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}}$$

$k=2j+1$

Ejemplos: Hallar STF en $[-1,1]$ de los siguientes funciones

1) $f(x) = x^2$



$a_k = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} x^2 \cos(\pi k x)\,dx$

$a_k = \frac{4\cdot(-1)^k}{\pi^2 k^2} \quad k \neq 0$

$a_0 = \frac{2}{3}$

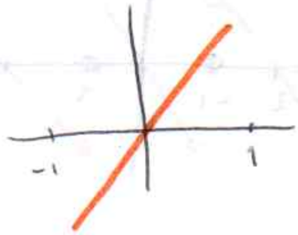
$b_k = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} x^2 \operatorname{sen}(\pi k x)\,dx$

$b_k = 0$

STF:

$$\underbrace{\frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2} \cos(\pi k x)}$$

2) $g(x) = x$



$a_k = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} x \cos(\pi k x)\,dx$

$a_k = 0$

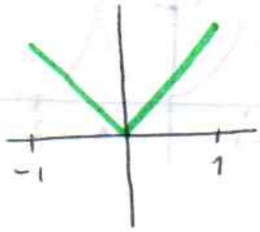
$b_k = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} x \operatorname{sen}(\pi k x)\,dx$

$= \frac{-2(-1)^k}{\pi k}$

STF:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi k} \operatorname{sen}(\pi k x)}$$

3) $h(x) = |x|$



$a_k = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} |x| \cos(\pi x k)\,dx$

$= 2\cdot\frac{((-1)^k - 1)}{\pi^2 k^2} \quad k \neq 0$

$a_0 = 1$

$b_k = 0$

STF:

$$\underbrace{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2((-1)^k - 1)}{\pi^2 k^2} \cos(\pi k x)}$$

Derivar término a término?

Resulta:

$$\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2}\cdot(\pi k)\cdot\operatorname{sen}(\pi k x)$$

$$= 2\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi k} \operatorname{sen}(\pi k x)}$$

S.F de X

$f'(x) = 2X$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} 2(-1)^{k+1}\cdot\cos(\pi k x)}$$

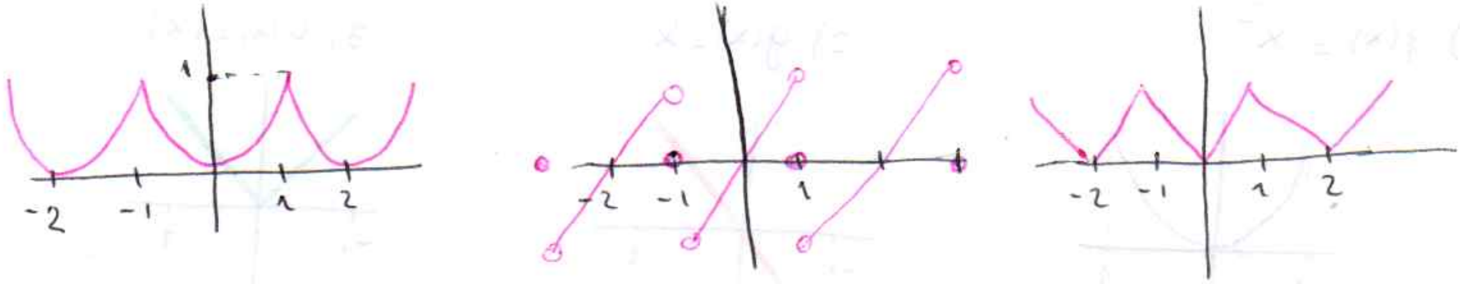
no converge porque el término general no tiende a 0

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^k)}{\pi k} \operatorname{sen}(\pi k x)}$$

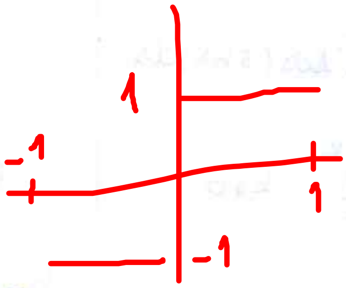
por criterio de Dirichlet-Abel converge para todo x.

A qué converge?

A qué convergen las SF de f, g, h?



Nótese que: $h'(x) = \begin{cases} -1 & -1<x<0 \\ 1 & 0<x<1 \end{cases}$



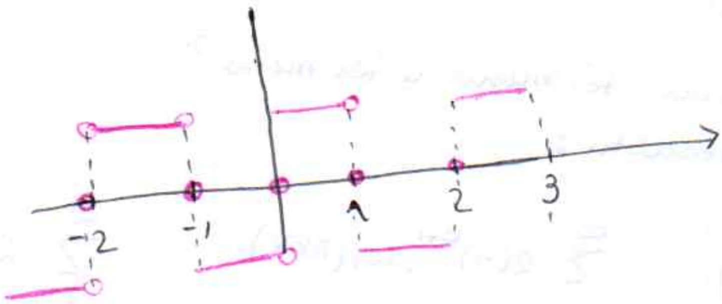
la S.F de h' tiene coeficientes:

$$a_k = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} h'(x)\cos(\pi k x)\,dx = 0$$

$$b_k = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} h'(x)\,sen(\pi k x)\,dx = 2\int_{0}^{1} sen(\pi k x)\,dx = \frac{(1-(-1)^k).2}{\pi k}$$

SF de h': $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2.\frac{(1-(-1)^k)}{\pi k}.\,sen(\pi k x)$

Converge a:



Ejemplo: Hallar la serie de senos de $f(x)=x$ en $[0,1]$.

(es decir, la S.F. respecto al sistema ortogonal $\{\operatorname{sen}(\pi k x)\}_{k=1}^{\infty}$)

$$b_k = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cdot\operatorname{sen}(\pi k x)\,dx = 2\int_0^1 x\operatorname{sen}(\pi k x)\,dx = 2\cdot\frac{(-1)^{k+1}}{\pi k}$$

ver ejemplo anterior, función g.

SF de senos: $\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi k}\operatorname{sen}(\pi k x)}$ → S.F. de la extensión impar de $f(x)=x$

Ejemplo: Hallar la serie de cosenos de $f(x)=x$ en $[0,1]$.

(es decir, la S.F. respecto al sistema ortogonal $\{\cos(\pi k x)\}_{k=0}^{\infty}$)

$$a_k = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cos(\pi k x)\,dx = 2\int_0^1 x\cos(\pi k x)\,dx = 2\cdot\left(\frac{(-1)^k-1}{\pi^2k^2}\right) \quad \text{si } k\neq 0$$

ver ej. función h

$$a_0 = 2\int_0^1 x\,dx = 1$$

SF de cosenos: $\underbrace{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} 2\left(\frac{(-1)^k-1}{\pi^2k^2}\right)\cos(\pi k x)}$ → SF de la extensión par de $f(x)=x$